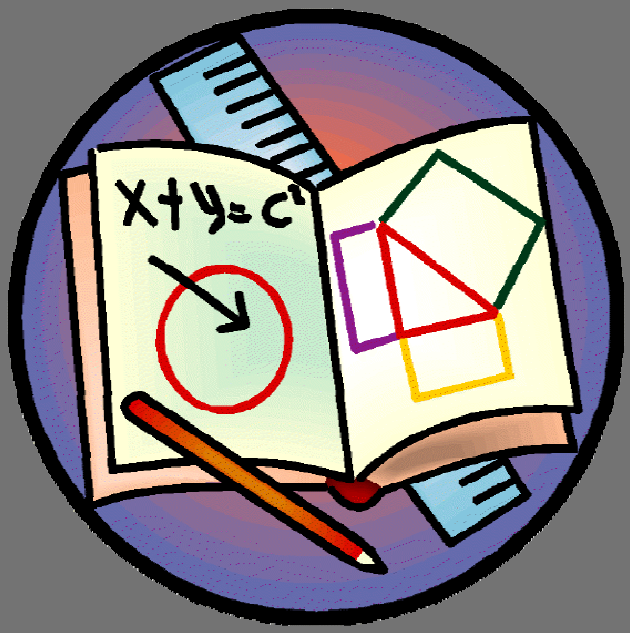
ملخصات دروس الرياضيات

للسنة الثالثة ثانوي إعدادي

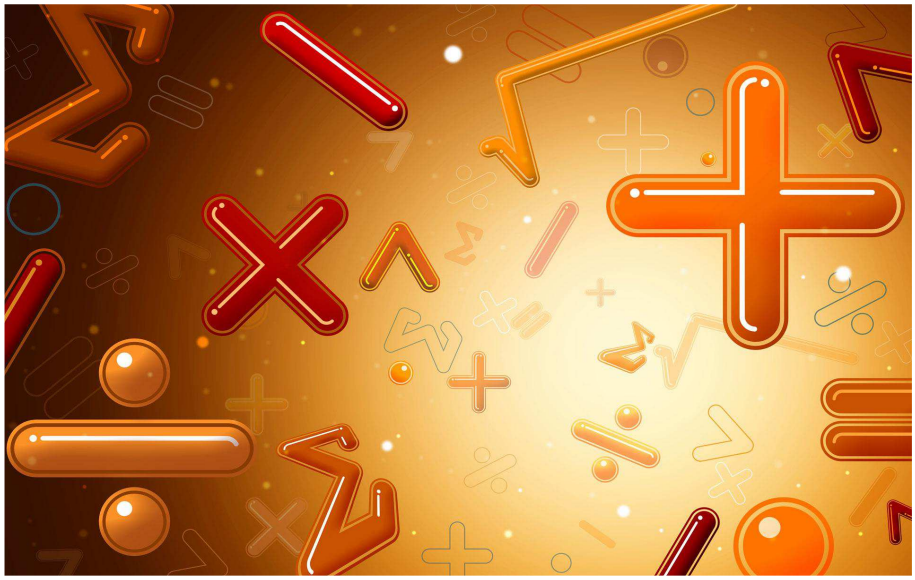


من إعداد الأستاذ علي تاموسيت

http://4maths.jimdo.com

الفهرس

الأنشطة العددية



النشر و التعميل : المتطابقات الهامة

1. النشر و التعميل (تذكير):

خاصيات:

a و b و k و m أعداد حقيقية.

	الخاصية:	مثال:
النشر	$k(a+b)=ka+kb$	$2(x+1)=2\times x+2\times 1=2x+2$
	$k(a-b)=ka-kb$	$3(x-2y)=3\times x-3\times 2y=3x-6y$
التعميل	$ma+mb=m(a+b)$ m يسمى العامل المشترك	$9x+6y=3\times 3x+3\times 2y=3(3x+2y)$
	$ma-mb=m(a-b)$ m يسمى العامل المشترك	$5x-15y=5\times x-5\times 3y=5(x-3y)$

نتائج:

a و b و c و d أعداد حقيقية.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$$
$$(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$$
$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

2. المتطابقات الهامة:

خاصيات:

a و b و x و y أعداد حقيقية.

	الخاصية:	مثال:
النشر	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(t+1)^2=t^2+2\times t\times 1+1^2=t^2+2t+1$
	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a-3)^2=a^2-2\times a\times 3+3^2=a^2-6a+9$
	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(b-4)(b+4)=b^2-4^2=b^2-16$ $(m+7)(m-7)=m^2-7^2=m^2-49$
التعميل	$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$	$d^2+4d+4=d^2+2\times d\times 2+2^2=(d+2)^2$
	$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$	$h^2-12h+36=h^2-2\times h\times 6+6^2=(h-6)^2$
	$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$	$j^2-81=j^2-9^2=(j-9)(j+9)$

القوى

1. تعاريف و ملاحظات:

أ. قوى عدد حقيقي ذات أس موجب:

a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n \text{ من العوامل المساوية كلها للعدد } a}$$

الكتابة a^n تسمى قوة العدد الحقيقي a من الرتبة n، و تقرأ: " a أس n ".

العدد a هو أساس القوة a^n و العدد n هو أس القوة a^n.

و بالاصطلاح: $a^1 = a$ و $a^0 = 1$ (a غير منعدم بالنسبة للثانية).

ب. قوى عدد حقيقي ذات أس سالب:

a عدد حقيقي غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ملاحظات: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ و $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

2. قوى العدد 10:

خاصية:

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

$$10^n = 1\underbrace{000\cdots\cdots 0}_{n \text{ من الأصفار}} \qquad 10^{-n} = \underbrace{0,00\cdots\cdots 0}_{n \text{ من الأصفار}}1$$

3. الكتابة العلمية:

تعريف:

D عدد عشري نسبي.

الكتابة $D = d \times 10^n$ هي الكتابة العلمية للعدد D حيث:

- **n عدد صحيح نسبي؛**
- **d عدد عشري نسبي له نفس إشارة العدد D ويحقق:**

$1 \le d < 10$ في الحالة الموجبة و $-10 < d \le -1$ في الحالة السالبة.

4. العمليات على القوى:

خاصيات:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمان و m و n عددان صحيحان نسبيان.

الخاصية:	أمثلة:
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$5^3 \times 5^{14} = 5^{3+14} = 5^{17}$; $x^2 \times x \times x^5 = x^{2+1+5} = x^8$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{17^6}{17^2} = 17^{6-2} = 17^4$; $\frac{y^{19}}{y^{11}} = y^{19-11} = y^8$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$(5^3)^4 = 5^{3\times 4} = 5^{12}$; $(v^9)^5 = v^{9\times 5} = v^{45}$
$(ab)^n = a^n \times b^n$	$(7h)^2 = 7^2 \times h^2 = 49h^2$; $7^9 \times 3^9 = (7\times 3)^9 = 21^9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3^2}{8^2} = \frac{9}{64}$; $\frac{15^{11}}{5^{11}} = \left(\frac{15}{5}\right)^{11} = 3^{11}$

الجذور المربعة

I. الجذر المربع لعدد حقيقي موجب:

تعريف:

جذر مربع العدد الحقيقي الموجب a هو العدد الذي مربعه يساوي a و نرمز له ب: $\sqrt{a}$.

بصيغة أخرى:

جذر مربع العدد الحقيقي الموجب a هو العدد الحقيقي الموجب b بحيث: $b^2 = a$.

و نكتب: $b = \sqrt{a}$.

ملاحظات و نتائج:

- الكتابة $\sqrt{a}$ لها معنى إذا كان a موجبا.
- المتساوية $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ خاطئة عموما.
- x و y عددان حقيقيان موجبان.

  $\sqrt{x} = y$ يعني: $x = y^2$.
- a عدد حقيقي موجب.

  $\sqrt{a^2} = a$ و $\sqrt{a}^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

II. العمليات على الجذور المربعة:

خاصيات:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

الخاصية:	مثال:
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$	$\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7 \times 5} = \sqrt{35}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{\frac{9}{121}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{121}} = \frac{3}{11}$

نتائج:

- a و b عددان حقيقيان موجبان.

  $$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$
- a عدد حقيقي موجب قطعا.

  $$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

خاصية:

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a \neq b$.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

خاصية:

a عدد حقيقي.

المعادلة $x^2 = a$	$a = 0$	للمعادلة حل وحيد هو $x = 0$.
	a موجب	المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
	a سالب	المعادلة لا تقبل حلا.

الترتيب و العمليات

I. مقارنة عددين حقيقيين:

قاعدة أساسية:

لمقارنة عددين حقيقيين a و b ندرس إشارة فرقهما $a-b$.

- $a-b\geq 0$ تعني: $a\geq b$.
- $a-b\leq 0$ تعني: $a\leq b$.

II. الترتيب و العمليات:

1. الجمع:

a و b و c أعداد حقيقية.

- $a\leq b$ تعني: $a+c\leq b+c$.
- $a\leq b$ تعني: $a-c\leq b-c$.

2. الضرب:

- إذا كان $a\leq b$ و c موجب، فإن: $a\times c\leq b\times c$.
- إذا كان $a\leq b$ و c سالب، فإن: $a\times c\geq b\times c$.
- إذا كان $a\leq b$ و c موجب قطعا، فإن: $\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.
- إذا كان $a\leq b$ و c سالب قطعا، فإن: $\frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}$.

نتيجة:

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq b\\ c\leq d\end{cases}$ ، فإن: $a\times c\leq b\times d$.

3. المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمان لهما نفس الإشارة.

- $a\leq b$ تعني: $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$.

4. المربع:

a و b عددان حقيقيان.

- إذا كان a و b موجبان، فإن: $a\leq b$ تعني: $a^2\leq b^2$.
- إذا كان a و b سالبان، فإن: $a\leq b$ تعني: $a^2\geq b^2$.

5. الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

- $a\leq b$ تعني: $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.

III. التأطير:

تعريف:

a و b و x أعداد حقيقية حيث: $a\leq b$ ، الكتابة $a\leq x\leq b$ تسمى تأطيرا للعدد x.

1. تأطير المجموع:

a و b و c و d و x و y أعداد حقيقية.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}$ ، فإن: $a+c\leq x+y\leq b+d$.

2. تأطير الجداء:

a و b و c و d و x و y أعداد حقيقية موجبة.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}$ ، فإن: $a\times c\leq x\times y\leq b\times d$.

المعادلات و المتراجحات

I. المعادلات:

1. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف:

نسمي معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x كل متساوية يمكن كتابتها على شكل : $ax+b=0$ مع a و b عددان حقيقيان معلومان.

2. حل معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

خاصيات:

- $x^2=0$ تعني: $x=0$ ،
- $x^2=a$ (a عدد حقيقي موجب) تعني: $x=\sqrt{a}$ أو $x=-\sqrt{a}$ ،
- $x\times y=0$ (x و y غير معلومين) تعني: $x=0$ أو $y=0$.

3. حل المسائل:

خطوات حل مسألة

1. قراءة نص المسألة قراءة جيدة مع استخراج المعطيات (الضمنية و الصريحة).
2. فهم المطلوب.
3. اختيار المجهول المناسب و تحديد طبيعته.
4. صياغة المعادلة أو المعادلات.
5. حل المعادلة.
6. التحقق من الحل و ملاءمته مع معطيات المسألة بالرجوع إلى المسألة المطروحة.

II. المتراجحات:

1. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف:

نسمي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x كل متفاوتة يمكن كتابتها على شكل: $ax+b\geq 0$ أو $ax+b>0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b<0$ حيث a و b عددان حقيقيان معلومان.

2. حل المسائل:

خطوات حل مسألة

1. قراءة نص المسألة قراءة جيدة مع استخراج المعطيات (الضمنية و الصريحة).
2. فهم المطلوب.
3. اختيار المجهول المناسب و تحديد طبيعته.
4. صياغة المتراجحة أو المتراجحات.
5. حل المتراجحة.
6. الرجوع إلى المسألة المطروحة.

النظمات

1. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

تعريف:

نسمي نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل نظمة يمكن كتابتها على شكل: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a و a' و b و b' و c و c' أعداد حقيقية معلومة.

2. الحل الجبري لنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

أ. طريقة التعويض:

من إحدى المعادلتين نجد تعبير أحد المجهولين بدلالة الآخر، ثم نعوضه في المعادلة الأخرى، لنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد و من تم نجد حل النظمة.

ب. طريقة التأليفة الخطية:

نقوم بضرب كل معادلة من معادلتي النظمة في معامل مناسب لنحصل على معاملين متقابلين بالنسبة لنفس المجهول ثم نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف ثم نختزل بالأطراف المتقابلة و من تم نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

3. الحل الميباني لنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

انطلاقا من نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين نحدد مستقيمين في المستوى كل واحد منهما معرف بمعادلته المختصرة فيكون حل النظمة هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين.

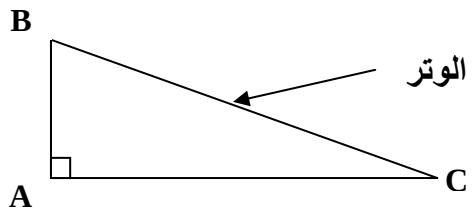
الأنشطة الهندسية

مبرهنة فيتاغورس

I. مبرهنة فيتاغورس المباشرة:

مبرهنة 1:

إذا كان ABC **مثلثا قائم الزاوية في** A **، فإن:** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **.**



ملاحظة:

العلاقة السابقة مرتبطة برأس الزاوية القائمة، فإذا كان المثلث ABC **قائم الزاوية في** B **، فإن العلاقة تصبح:** $AC^2 = AB^2 + BC^2$ **.**

II. مبرهنة فيتاغورس العكسية:

مبرهنة 2:

ABC **مثلث.**

إذا كان: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **، فإن المثلث** ABC **قائم الزاوية في** A **.**

III. خلاصة:

م.ف.م.

$\longleftarrow$

يكون المثلث ABC **قائم الزاوية في** A **إذا وفقط إذا كان:** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **.**

$\longrightarrow$

م.ف.ع.

مبرهنة طاليس

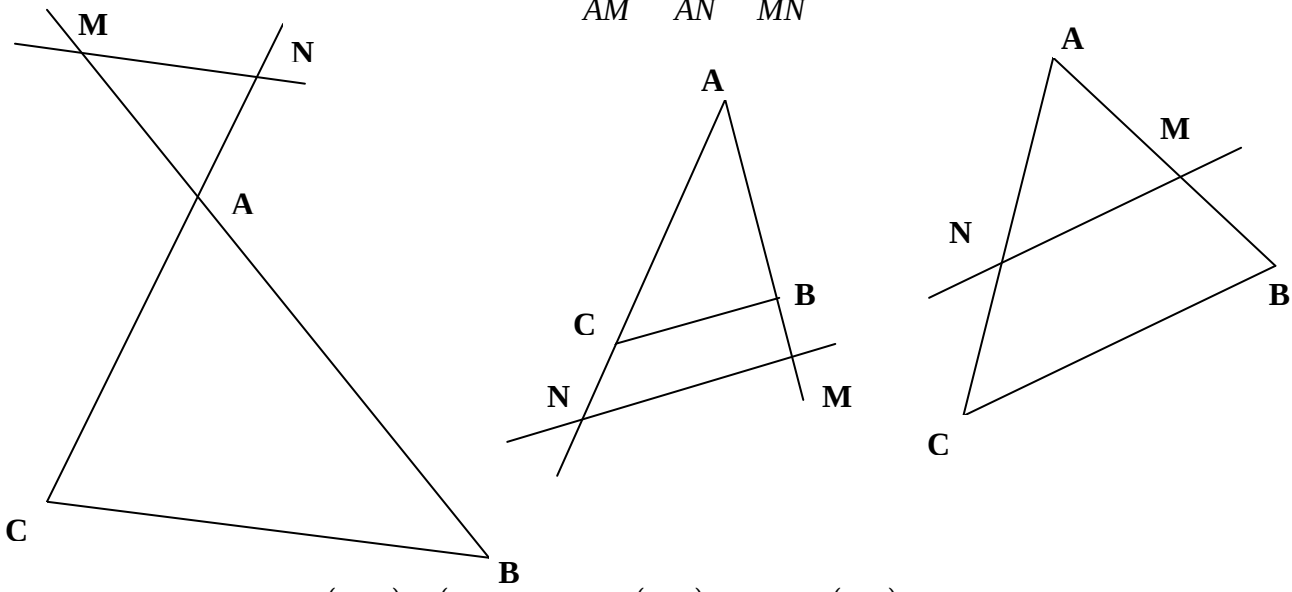
I. مبرهنة طاليس المباشرة:

مبرهنة 1:

ABC مثلث، M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC).

إذا كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان، فإن: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

و من العلاقة السابقة لدينا أيضا: $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$.



$M\in(AB)$ و $N\in(AC)$ و $(MN)//(BC)$

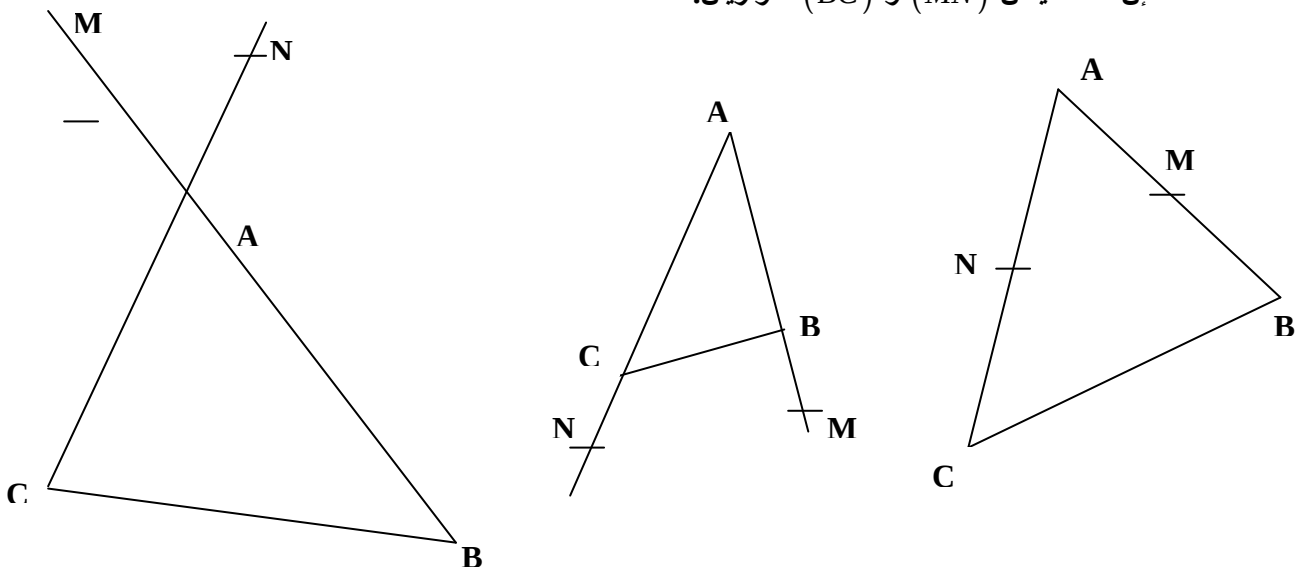
II. مبرهنة طاليس العكسية:

مبرهنة 2:

ABC مثلث، M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC).

إذا كانت النقط A و M و B لها نفس ترتيب النقط A و N و C و $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$،

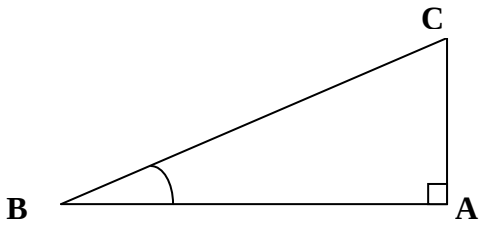
فإن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان.



ملاحظة: المبرهنة السابقة صحيحة أيضا في حالة: $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$.

الحساب المثلثي

مصطلحات:

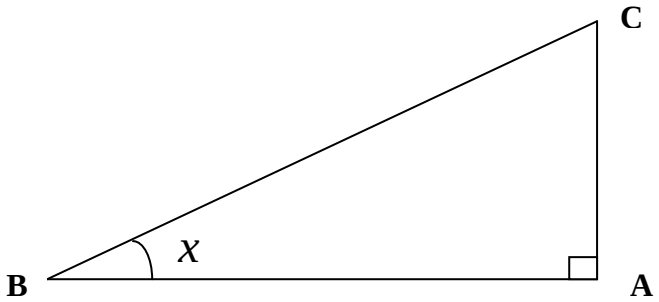


باعتبار الزاوية $\widehat{ABC}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في A :

- الضلع $[AB]$ يسمى: الضلع المحاذي؛
- الضلع $[AC]$ يسمى: الضلع المقابل؛
- الضلع $[BC]$ يسمى: الوتر.

1. النسب المثلثية لزاوية حادة غير منعدمة:

لتكن $\widehat{ABC}$ زاوية حادة غير منعدمة قياسها x في مثلث ABC قائم الزاوية في A كما هو مبين في الشكل التالي:



- النسبة $\frac{AB}{BC}$ (طول الضلع المحاذي على الوتر) تسمى جيب تمام الزاوية $\widehat{ABC}$ أو جيب تمام القياس x.

  نكتب $\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}$ أو $\cos x=\frac{AB}{BC}$ ، و نقرأ: $\text{cosinus}\,\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}$.

- النسبة $\frac{AC}{BC}$ (طول الضلع المقابل على الوتر) تسمى جيب الزاوية $\widehat{ABC}$ أو جيب القياس x.

  نكتب $\sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC}$ أو $\sin x=\frac{AC}{BC}$ ، و نقرأ: $\text{sininus}\,\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC}$.

- النسبة $\frac{AC}{AB}$ (طول الضلع المقابل على طول الضلع المحاذي) تسمى ظل الزاوية $\widehat{ABC}$ أو ظل القياس x.

  نكتب $\text{tg}\,\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}$ أو $\text{tg}\,x=\frac{AC}{AB}$ (يرمز له أيضا ب $\tan x$)، و نقرأ: $\text{tangente}\,\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}$.

النسب $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$ و $\text{tg}\,\widehat{ABC}$ تسمى نسبا مثلثية للزاوية الحادة غير المنعدمة $\widehat{ABC}$ (أو للقياس x).

ملاحظة:

x قياس زاوية حادة حيث: $0^\circ<x<90^\circ$.

$0<\cos\widehat{ABC}<1$ و $0<\sin\widehat{ABC}<1$ و $0<\text{tg}\,\widehat{ABC}$.

2. العلاقات المثلثية:

خاصية 1:

x قياس زاوية حادة حيث: $0^\circ\le x<90^\circ$.

$$\text{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

خاصية 2:

x قياس زاوية حادة.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

خاصية 3:

α و β قياسا زاويتين متتامتين غير منعدمتين ($\alpha+\beta=90^\circ$).

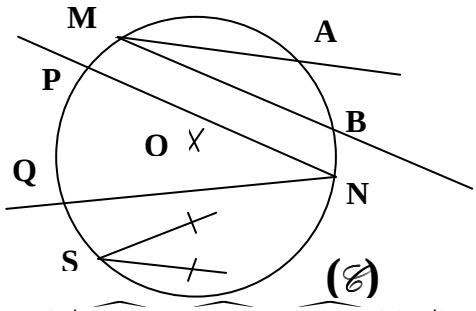
$\cos\alpha=\sin\beta$ و $\sin\alpha=\cos\beta$ و $\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{\text{tg}\,\beta}$.

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية في دائرة

في ما يلي نعتبر $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O.

I. الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية في دائرة:

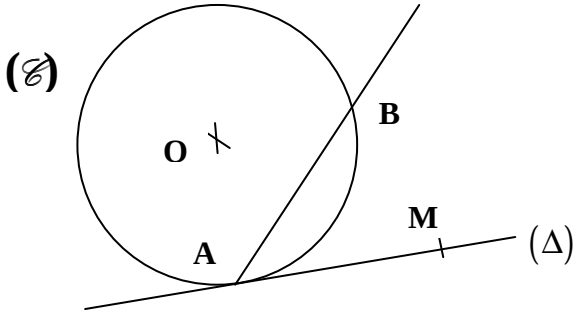
1. الزوايا المحيطية في دائرة:



في الرسم السابق الزوايا $\widehat{AMB}$ و $\widehat{PNQ}$ و $\widehat{RST}$ لها رؤوس تنتمي لمحيط الدائرة $(\mathscr{C})$ و تحصر (تحدد) أقواسا عليها،إذن فهي تسمى زوايا محيطية في الدائرة $(\mathscr{C})$.

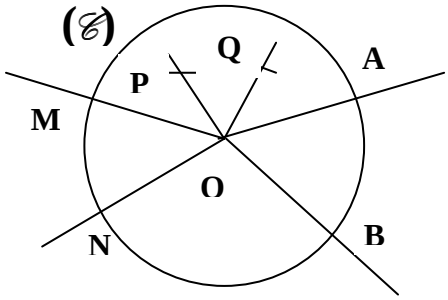
و نقول (مثلا): الزاوية $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $(\mathscr{C})$ تحصر القوس $\widehat{AB}$.

ملاحظة (حالة خاصة):



إذا كان (Δ) مستقيما مماسا للدائرة $(\mathscr{C})$ في نقطة A (انظر الرسم السابق)، فإن الزاوية $\widehat{MAB}$ تعتبر زاوية محيطية في الدائرة $(\mathscr{C})$ تحصر القوس $\widehat{AB}$.

2. الزوايا المركزية في دائرة :

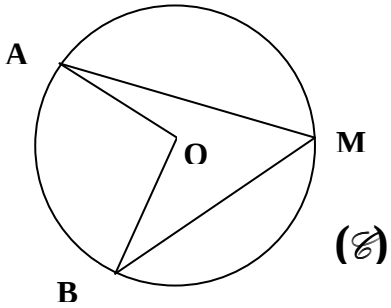


في الرسم السابق الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{MON}$ و $\widehat{POQ}$ لها رأس مشترك و هو O مركز الدائرة $(\mathscr{C})$، إذن فهي تسمى زوايا مركزية في الدائرة $(\mathscr{C})$.

و نقول (مثلا): الزاوية $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة $(\mathscr{C})$ تحصر القوس $\widehat{AB}$.

3. **ملاحظات:**

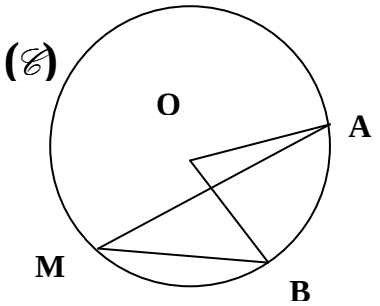
نعتبر الرسم التالي:



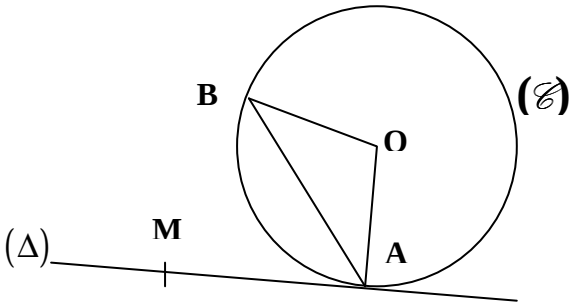
- هناك زاوية مركزية وحيدة في الدائرة $(\mathscr{C})$ تحصر القوس $\widehat{AB}$ و هي $\widehat{AOB}$ بينما هناك عدد غير منته من الزوايا المحيطية في الدائرة $(\mathscr{C})$ تحصر القوس $\widehat{AB}$.
- $\widehat{AOB}$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$ في الدائرة $(\mathscr{C})$.

II. خاصيتان:

1. العلاقة بين قياس الزاوية المحيطية في دائرة و قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها:



$$\boxed{\widehat{AMB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB} \quad ; \quad \widehat{AOB}=2\widehat{AMB}}$$

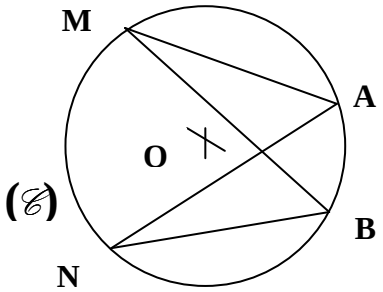


$$\boxed{\widehat{MAB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB} \quad ; \quad \widehat{AOB}=2\widehat{MAB}}$$

خاصية:

قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها.

2. العلاقة بين قياس زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران نفس القوس:



$$\boxed{\widehat{AMB}=\widehat{ANB}}$$

خاصية:

إذا حصرت زاويتان محيطيتان في دائرة نفس القوس فإنهما تكونان متقايستان.

المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

I. المثلثات المتقايسة:

1. تعاريف و نتائج:

تعريف:

نقول عن مثلثين إنهما متقايسان عندما يكونان قابلان للتطابق.

نتيجتان:

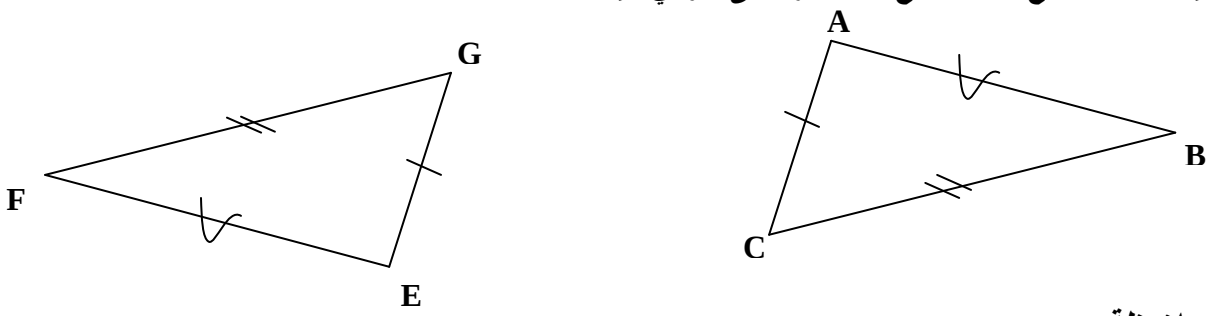
في مثلثين متقايسين:

- كل ضلعين متناظرين متقايسان،
- كل زاويتين متناظرتين متقايستان.

2. حالات تقايس مثلثين:

خاصية 1 (الحالة الآولى):

إذا قايست أضلاع مثلث أضلاع مثلث آخر، على التوالي، فإن هذين المثلثين متقايسان.

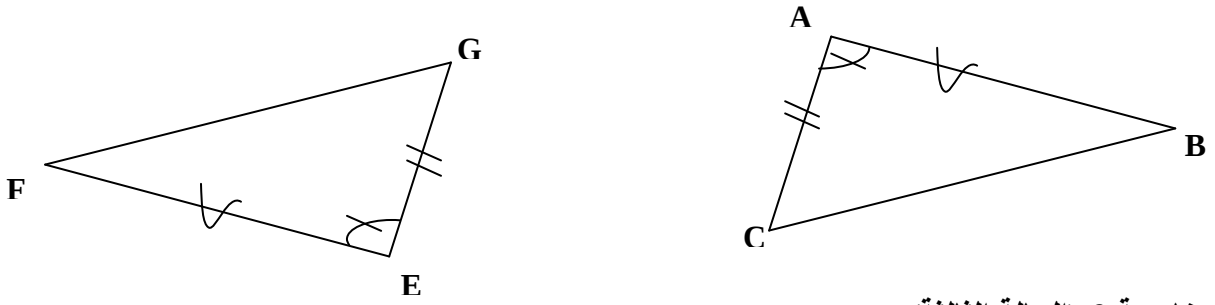


ملاحظة:

كل مثلث يقايس مماثله بتماثل مركزي أو بتماثل محوري.

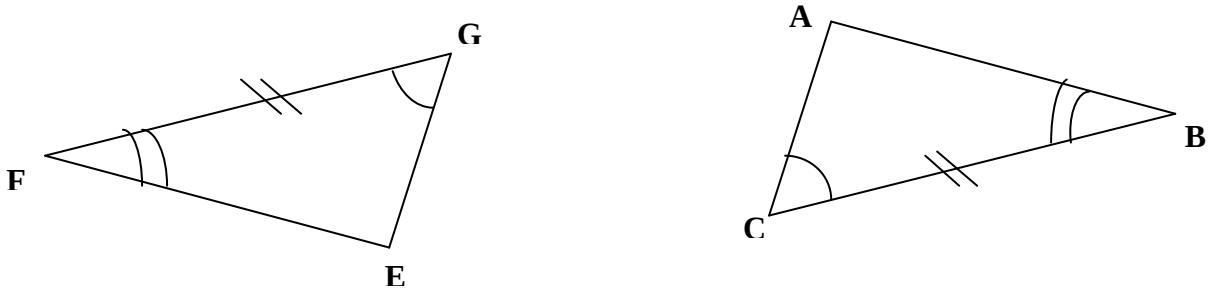
خاصية 2 (الحالة الثانية):

إذا قايس ضلعان لمثلث و الزاوية المحصورة بينهما، على التوالي، ضلعين لمثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما، فإن هذين المثلثين متقايسان.



خاصية 3 (الحالة الثالثة):

إذا قايست زاويتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما، على التوالي، زاويتين لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما، فإن هذين المثلثين متقايسان.



II. المثلثات المتشابهة:

1. تعاريف و نتائج:

تعريف:

نقول على مثلثين أنهما متشابهان عندما تقايس زوايا أحدهما زوايا المثلث الآخر على التوالي.

ملاحظة:

نتحدث أيضا في مثلثين متشابهين عن الأضلاع المتناظرة و عن الزوايا المتناظرة.

نتيجتان:

في مثلثين متشابهين:

- كل زاويتين متناظرتين تكونان متقايستان،
- أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة على التوالي.

ملاحظات:

- في مثلثين متشابهين ABC و EFG :

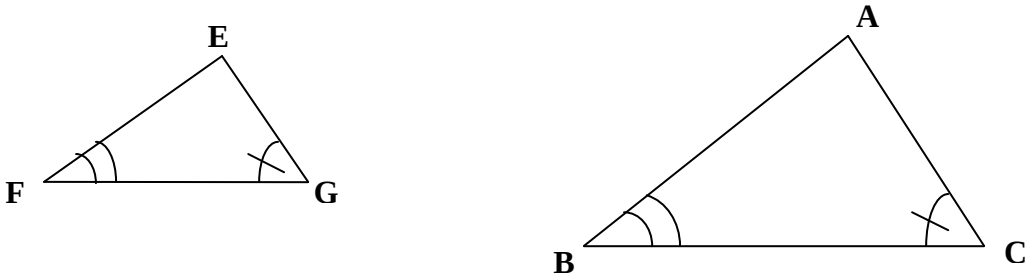
  لدينا: $\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}=k$

  العدد k يسمى نسبة تشابه المثلثين ABC و EFG ، في هذا الترتيب.
- يمكن معرفة الأضلاع المتناظرة في مثلثين متشابهين و ذلك بترتيب أطوال أضلاع كل مثلث على التوالي ترتيبا إما تصاعديا و إما تناقصيا.

2. حالات تشابه مثلثين:

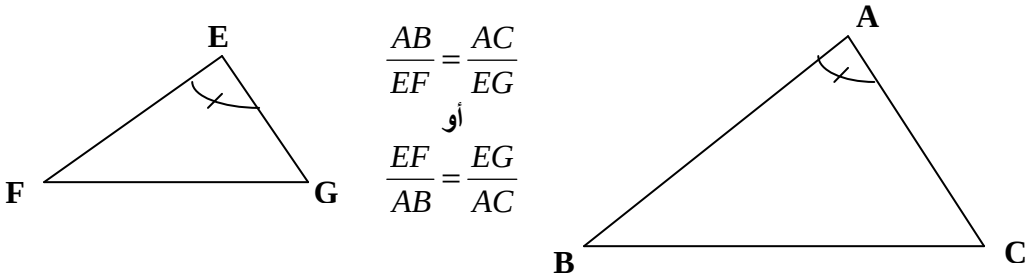
خاصية 1 (الحالة الآولى):

إذا قايست زاويتان لمثلث، على التوالي، زاويتين لمثلث آخر، فإن هذين المثلثين متشابهان.



خاصية 2 (الحالة الثانية):

إذا قايست زاوية لمثلث زاوية لمثلث آخر، و كانت أطوال الأضلاع المحاذية للزاويتين متناسبة، على التوالي، فإن هذين المثلثين متشابهان.



$$\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}$$

أو

$$\frac{EF}{AB}=\frac{EG}{AC}$$

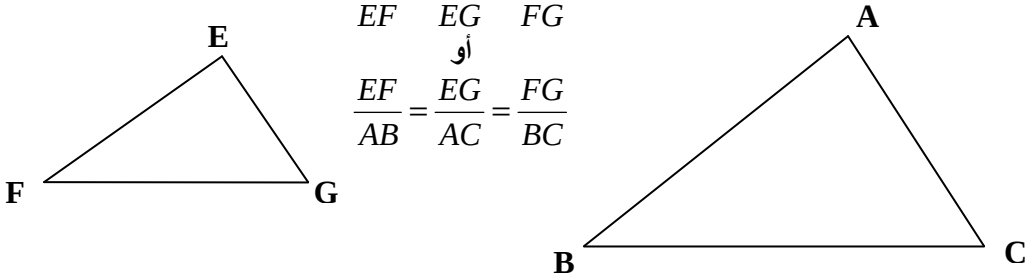
خاصية 3 (الحالة الثالثة):

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة، على التوالي، مع أطوال أضلاع مثلث آخر، فإن هذين المثلثين متشابهان.

$$\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}$$

أو

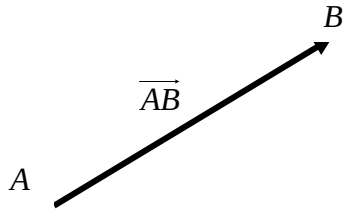
$$\frac{EF}{AB}=\frac{EG}{AC}=\frac{FG}{BC}$$



الإزاحة و المتجهات

I. تذكير:

1. العناصر المحددة لمتجهة:

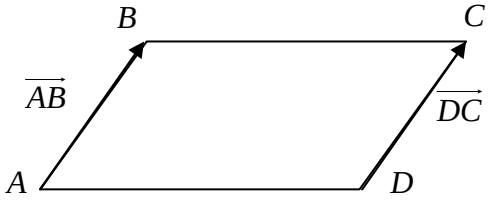


المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تحدد بالعناصر التالية:

- ❖ الاتجاه: المستقيم (AB)،
- ❖ المنحى: من الأصل A نحو الطرف B،
- ❖ المنظم: المسافة AB.

2. تساوي متجهتين:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ تعني: $ABCD$ متوازي أضلاع.



3. متجهة منعدمة:

$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

4. مقابل متجهة:

مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{BA}$ و نكتب: $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}$

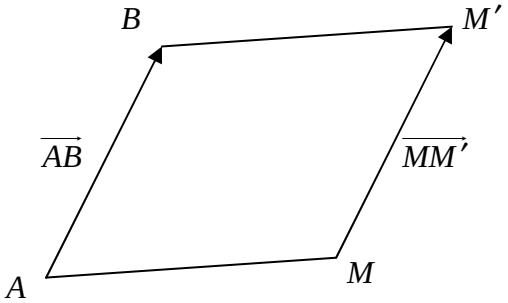
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

II. الإزاحة:

تعريف:

A و B نقطتان من المستوى.

صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B هي النقطة M' حيث $ABM'M$ متوازي أضلاع.



$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}}$$

نقول أيضا M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

خاصيات:

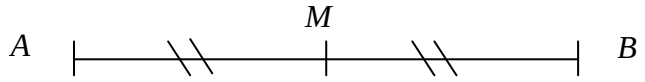
1) إذا كانت M' و N' صورتي M و N على التوالي بنفس الإزاحة، فإن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$.
2) صورة مستقيم (D) بإزاحة هو مستقيم (D') يوازيه.
3) صورة نصف مستقيم $[MN)$ بإزاحة هي نصف مستقيم $[M'N')$.
4) صورة قطعة $[MN]$ بإزاحة هي قطعة $[M'N']$ تقايسها.
5) صورة دائرة (C) مركزها O بإزاحة هي دائرة (C') لها نفس الشعاع و مركزها O' صورة O بنفس الإزاحة.
6) صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها.

III. المتجهات:

1. المتجهة و منتصف قطعة:

A و B و M ثلاث نقط من المستوى.

M منتصف القطعة $[AB]$ تعني: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

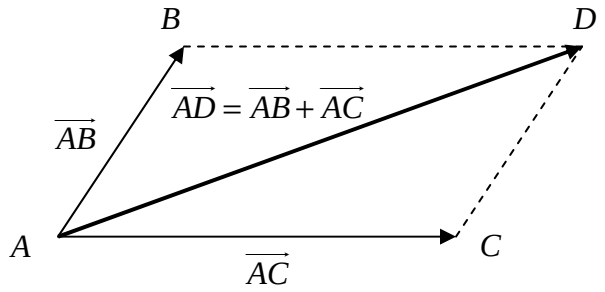


2. مجموع متجهتين:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$ بحيث $ABDC$ متوازي أضلاع، و نكتب:

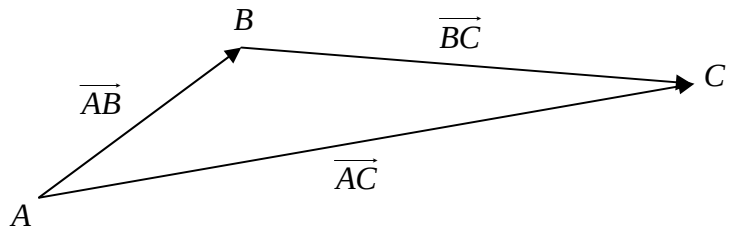
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



3. علاقة شال:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

لدينا: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



4. جداء متجهة في عدد حقيقي:

A و B نقطتان مختلفتان من المستوى و k عدد حقيقي.

نقول إن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هي جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k و نكتب: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ، إذا كانت C تنتمي للمستقيم (AB) بحيث:

- إذا كان $k > 0$: $AC = kAB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى.
- إذا كان $k < 0$: $AC = -kAB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما منحيان متعاكسان.

ملاحظة:

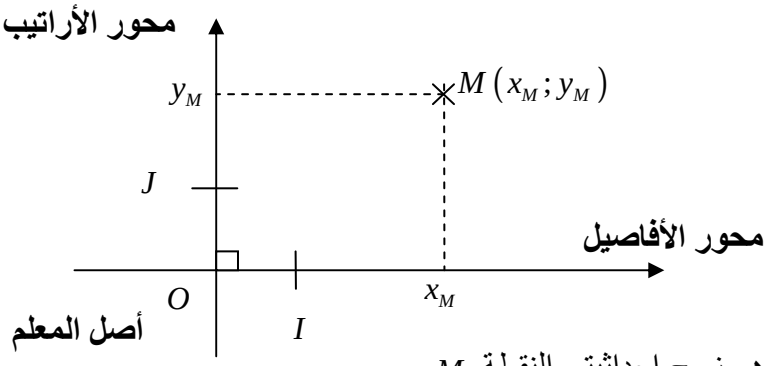
A و B و M ثلاث نقط من المستوى و k عدد حقيقي.

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ تعني: النقط A و B و M نقط مستقيمية.

المعلم في المستوى

1. إحداثيتا نقطة:

ليكن (O,I,J) معلما متعامدا ممنظما للمستوى ($(OI)\perp(OJ)$ و $OI=OJ=1$).



$(x_M;y_M)$ هو زوج إحداثيتي النقطة M.

x_M و y_M هما على التوالي أفصول و أرتوب النقطة M.

2. إحداثيتا متجهة:

خاصية 1:

في م.م.م. (O,I,J)، نعتبر النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.

إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما: x_B-x_A و y_B-y_A، و نكتب: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

3. تساوي متجهتين:

خاصية 2:

في م.م.م. (O,I,J)، نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}(c;d)$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ تعني: $a=c$ و $b=d$.

4. إحداثيتا مجموع متجهتين – إحداثيتا ضرب متجهة في عدد حقيقي:

خاصية 3:

في م.م.م. (O,I,J)، نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}(c;d)$ و العدد الحقيقي k.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+c;b+d)$ و $k\overrightarrow{AB}(ka;kb)$.

5. إحداثيتا منتصف قطعة:

خاصية 4:

في م.م.م. (O,I,J)، نعتبر النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.

M منتصف القطعة $[AB]$ تعني: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

6. المسافة بين نقطتين:

خاصية 5:

في م.م.م. (O,I,J)، نعتبر النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

ملاحظة "منظم متجهة":

في م.م.م. (O,I,J) إذا كانت: $\overrightarrow{AB}(a;b)$، فإن: $AB=\sqrt{a^2+b^2}$.

معادلة مستقيم

1. المعادلة المختصرة لمستقيم:

تعريف 1:

ليكن (O,I,J) معلما متعامدا ممنظما للمستوى.

كل مستقيم (D) غير مواز لمحور الأراتيب له معادلة مختصرة تكتب على شكل: $y=mx+p$ ،

و نكتب: $(D): y=mx+p$ ، مع m و p عددان حقيقيان معلومان.

m يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (D).

p يسمى الأرتوب عند الأصل.

خاصية 1:

في م.م.م. (O,I,J) ، إذا كان المستقيم $(D): y=mx+p$ يمر من نقطتين مختلفتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ مع $x_A \neq x_B$ ، فإن: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

ملاحظة:

لإنشاء التمثيل المبياني لمستقيم معرف بمعادلته المختصرة نحتاج نقطتين مختلفتين.

	A	B
x	x_A	x_B
y	y_A	y_B

يستحسن إذا كان $(D): y=mx+p$ حيث m و p عددان صحيحان نسبيان أن نأخذ $x_A=0$ ثم $x_A=\pm 1$ (حسب الحالة التي لدينا).

2. توازي مستقيمين:

خاصية 2:

في م.م.م. (O,I,J) ، نعتبر المستقيمين: $(D): y=mx+p$ و $(\Delta): y=m'x+p'$.

$(D)//(\Delta)$ تعني: $m=m'$.

3. تعامد مستقيمين:

خاصية 3:

في م.م.م. (O,I,J) ، نعتبر المستقيمين: $(D): y=mx+p$ و $(\Delta): y=m'x+p'$.

$(D)\perp(\Delta)$ تعني: $mm'=-1$.

حساب الحجوم: التكبير و التصغير

I. المستقيمات و المستويات في الفضاء:

تمهيد:

بعد ملاحظة قاعة القسم يمكن أن نخلص إلى أن:

- ✓ الفضاء مجموعة غير محدودة من النقط، و المستوى و المستقيم جزءان من الفضاء،
- ✓ لرسم الأشكال في الفضاء فإننا غالبا ما لا نحترم طبيعة الأشكال، و تمثل الأجزاء المرئية بخطوط متصلة بينما الأجزاء غير المرئية تمثل بخطوط متقطعة،
- ✓ المجسم جزء من الفضاء محدود بسطح.

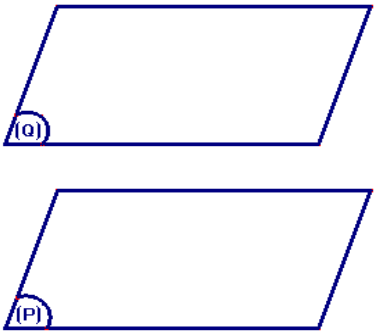
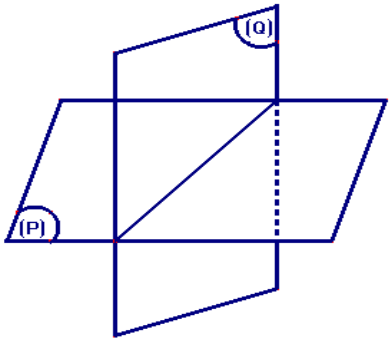
1. المستويات في الفضاء:

a. تمثيل مستوى في الفضاء:

عادة نمثل المستوى في الفضاء بمتوازي الأضلاع.

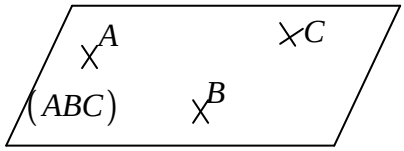
b. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء:

(P) و (Q) مستويان في الفضاء.

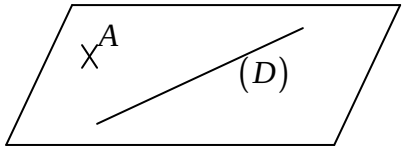
(P) و (Q) منطبقان	(P) و (Q) متوازيان قطعا	(P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم
		
	$(P)//(Q)$	

c. تحديد مستوى:

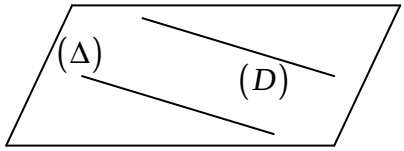
- كل ثلاث نقط غير مستقيمية في الفضاء تحدد مستوى وحيدا يرمز له بالرمز (ABC)؛



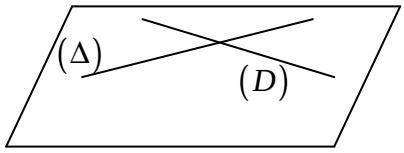
- كل مستقيم و نقطة خارجه في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



- كل مستقيمين متوازيين قطعا في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



- كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



ملاحظة: جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء.

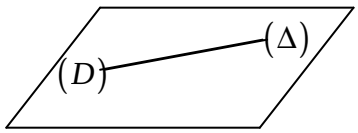
2. المستقيمات في الفضاء:

a. المستقيمات المستوائية:

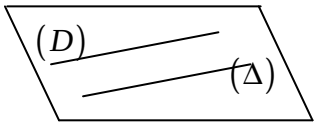
تعريف:

يكون مستقيمان مستوائيان إذا كانا يوجدان ضمن نفس المستوى.
و في هذه الحالة يكونان:

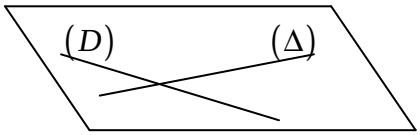
❖ إما منطبقين:



❖ و إما متوازيين قطعا:



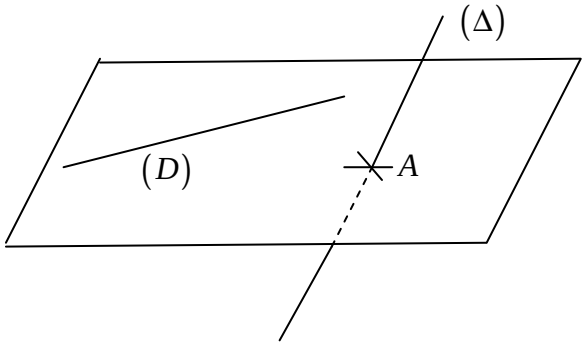
❖ و إما متقاطعين:



b. المستقيمات غير المستوائية:

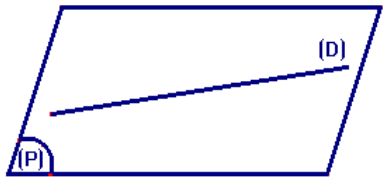
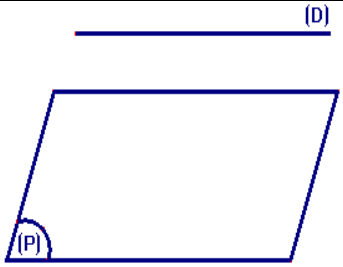
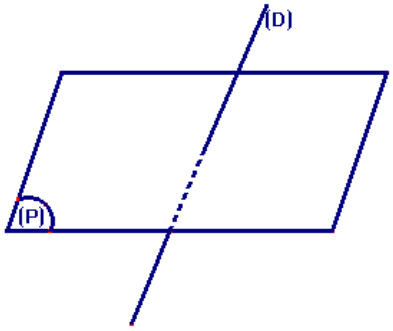
تعريف:

يكون مستقيمان غير مستوائيان إذا لم يوجد أي مستوى يتضمنهما معا.



3. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء:

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.

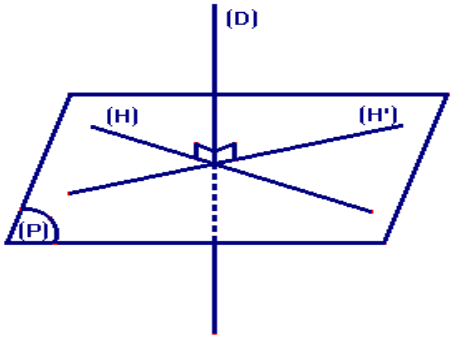
(D) ضمن (P)	(D) يوازي قطعا (P)	(D) يخترق (P) في نقطة
		
	$(D)//(P)$	

تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء:

تعريف:

(D) مستقيم في الفضاء مستوى (P) في نقطة A.

نقول إن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) في النقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على جميع المستقيمات الواقعة ضمن (P) و المارة من النقطة A، و نكتب: $(D)\perp(P)$.



مبرهنة:

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على مستقيمين من (P) متقاطعين في A.

نتيجة:

إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P)، فإن (D) يكون عموديا على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P).

II. التكبير و التصغير:

تعريف:

انطلاقا من شكل نستخرج شكلا يشابهه و ذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي k موجب قطعا و يخالف 1.

ملاحظة:

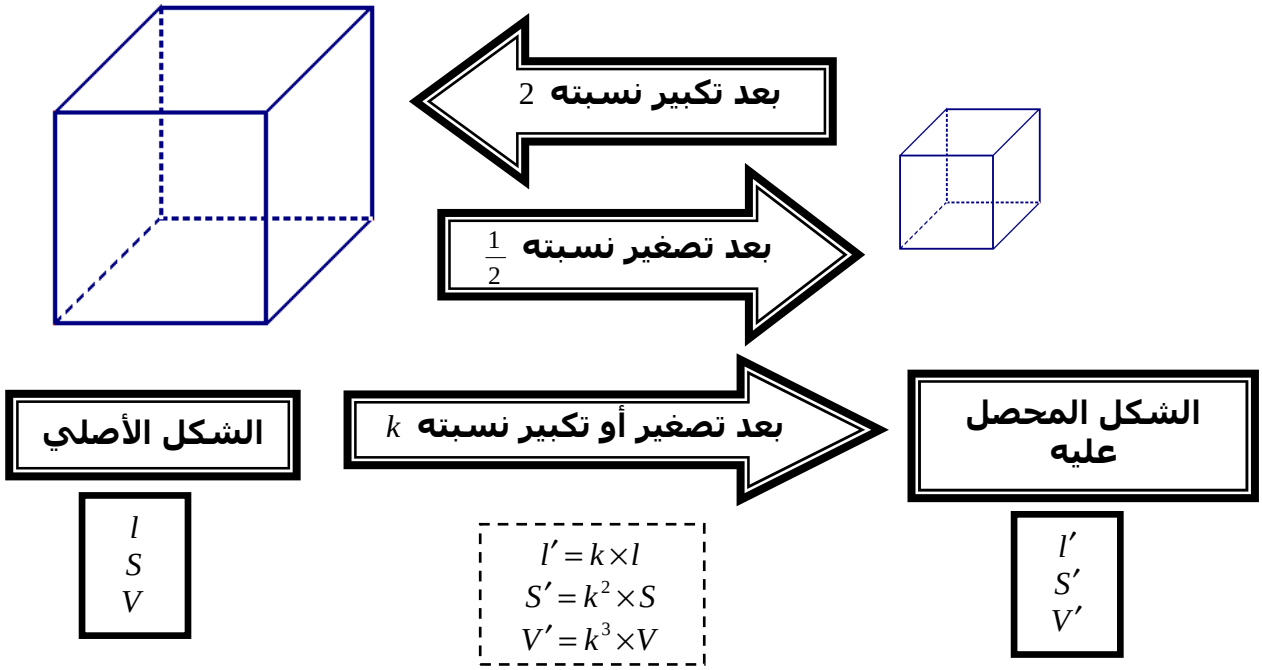
- ✓ نحصل على شكل مكبر إذا كان $k>1$ و نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k.
- ✓ نحصل على شكل مصغر إذا كان $0<k<1$ و نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k.

خاصية:

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء بنسبة k، فان :

- المسافة تضرب في k،

- المساحة تضرب في k^2,
- الحجم يضرب في k^3.



الأنشطة المبيانية والإحصائية

الدوال الخطية و الدوال التآلفية

I. الدالة الخطية:

1. تعاريف:

ليكن a عددا حقيقيا معلوما.

العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالجداء $a\times x$ تسمى دالة خطية معاملها a و نكتب: $f : x \mapsto ax$.

العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية f و نرمز لها بالرمز $f(x)$ و نكتب: $f(x)=ax$.

2. معامل دالة خطية:

خاصية:

f دالة خطية معاملها a.

إذا كان: α عدد حقيقي غير منعدم صورته معلومة بالدالة f ، فإن: $a=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.

3. التمثيل المبياني لدالة خطية:

f دالة خطية معاملها a.

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) التمثيل المبياني للدالة الخطية f هو المستقيم (OA) حيث: $A(\alpha;f(\alpha))$ مع α عدد حقيقي غير منعدم.

x	α
$f(x)$	$f(\alpha)=a\times\alpha$

II. الدالة التآلفية:

1. تعاريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين معلومين.

العلاقة g التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد $a\times x+b$ تسمى دالة تآلفية معاملها a و نكتب: $g : x \mapsto ax+b$.

العدد $ax+b$ يسمى صورة x بالدالة التآلفية g و نرمز لها بالرمز $g(x)$ و نكتب: $g(x)=ax+b$.

2. معامل دالة تآلفية:

خاصية:

g دالة تآلفية معاملها a.

إذا كان: α و β عددان حقيقيان مختلفان معلومان صورتهما معلومة بالدالة g ،

فإن: $a=\dfrac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta}$.

3. التمثيل المبياني لدالة تآلفية:

g دالة تآلفية تعبيرها: $g(x)=ax+b$.

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) التمثيل المبياني للدالة التآلفية g هو المستقيم (AB) حيث: $A(\alpha;g(\alpha))$ و $B(\beta;g(\beta))$ مع α و β عددان حقيقيان مختلفان.

x	α	β
$g(x)$	$g(\alpha)=a\times\alpha+b$	$g(\beta)=a\times\beta+b$

تذكير:

الساكنة الإحصائية : المجموعة المدروسة.
الميزة الإحصائية : المعيار الذي يصنف وفقه أفراد الساكنة الإحصائية.
الحصيص : عدد أفراد الساكنة الإحصائية الذين تتوفر فيهم هذه القيمة.
الحصيص الإجمالي : مجموع الحصيصات.
المتسلسلة الإحصائية : التوزيع الذي نحصل عليه للحصيص الإجمالي على مختلف قيم ا لميزة.
التردد : خارج الحصيص على الحصيص الإجمالي.
الحصيص المتراكم لقيمة ميزة معينة : مجموع حصيصات القيم الأصغر أو يساوي هذه القيمة.

1. **القيمة المتوسطة أو المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية:**

تعريف 1:

المعدل الحسابي أو القيمة المتوسطة لمتسلسلة إحصائية هو خارج مجموع جداءات قيم الميزة (أو مركز الصنف) و الحصيصات الموافقة لها على الحصيص الإجمالي، و نرمز له بالحرف: m.

2. **منوال متسلسلة إحصائية:**

تعريف 2:

قيمة/قيم ميزة (أو صنف/أصناف) متسلسلة إحصائية التي لها أكبر حصيص تسمى منوال المتسلسلة الإحصائية.

3. **القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية:**

تعريف 3:

نعتبر متسلسلة إحصائية قيم ميزتها مرتبة إما تزايديا و إما تناقصيا.
قيمة الميزة التي تقسم هذه المتسلسلة إلى جزأين لهما نفس الحصيص تسمى بالقيمة الوسطية، و نرمز لها بالحرف: M.

ملاحظة:

أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي هي قيمة وسطية.