MATHEMATIQUES Terminales S BAC BLANC 2007

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation (E) :
$z^2 - 6z + 12 = 0$
et de placer, par une construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

1- a) Résoudre l'équation (E). On vérifiera que l'une des solutions s'écrit $u = 3 + i\sqrt{3}$.

b) Vérifier que le module de u est $2\sqrt{3}$. Calculer un argument de u.
En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.

2- a) On considère le nombre complexe : $u - 4$. Ecrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer le module et un argument du nombre : $\dfrac{u}{u-4}$.

En déduire le module et un argument de $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

3- Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note :
A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2, et C le point d'affixe 6.
M et N sont les points d'affixes respectives u et $\overline{u}$.

a) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$.
En déduire que M est sur un cercle que l'on précisera.

b) Démontrer que M est aussi sur le cercle de diamètre [BC].

c) Construire les deux cercles obtenus, le point M puis le point N.

EXERCICE 2 (5,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 2 cm.
Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^x \quad , \qquad g(x) = (1-x)e^x \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(x) - g(x).$$

On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Etudier les variations des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que la courbe (C) admet une droite (Δ) comme asymptote oblique en $-\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - g(x)$.
   b) En déduire les variations de la fonction h.
   c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
   Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?
   Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
   d) Déterminer, suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C) et (C').
   e) Tracer, avec soin, les courbes (C), (C') et la droite (Δ) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 3 **(4 points)**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est strictement positif.
2) Etudier le sens de variation de (u_n) à l'aide du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
3) Montrer par récurrence que $u_{n+1} = e^{-S_n}$ où S_n est la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
4) Justifier que (u_n) est une suite convergente, puis montrer que sa limite est 0.
5) Exprimer S_n en fonction de u_{n+1} et en déduire la limite de S_n .

EXERCICE 4 **(3.5 points)**

Dans une pièce à température constante de 20°C, à l'instant initial noté 0, la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 80 °C. Cinq minutes plus tard, elle est de 50°C. On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps x (exprimé en minutes) et que $\theta'(x)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(x)$ et celle de la pièce. On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbb{R}$. Autrement dit : $\theta'(x) = a\ (\theta(x)\ -20)$.

1- Soit (E) l'équation différentielle $y' = a\,y$ et soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Calculer alors la dérivée de la fonction g : $x \mapsto f(x) \times e^{-ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire que si une fonction f est solution de (E), elle est de la forme $f(x) = k \times e^{ax}$ où k est une constante réelle.

2- Résoudre l'équation différentielle : $y' = a\,y - 20\,a$.

3- Démontrer que $\theta(x) = 60\,e^{\frac{-\ln 2}{5}x} + 20$.

EXERCICE 5 **(2 points)**

Soit f l'application définie sur **[0 ; + ∞[** par $f(x) = x \ln x$ **si** $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) f est-elle continue en 0 ?
2) f est-elle dérivable en 0 ?
3) Déterminer le sens de variation de f sur [0 ; + ∞[**.**