Exercices type Bac
Nombres complexes

Exercice 1 :

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose z = $-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) La forme algébrique de z^2 est :
   A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ C : $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$ D : $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
2) z^2 s'écrit sous forme exponentielle :
   A : $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ B : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ C : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ D : $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
3) z s'écrit sous forme exponentielle :
   A : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ B : $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ C : $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ D : $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$
4) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :
   A : $\dfrac{7\pi}{8}$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 2 :

Partie 1

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante

(E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme
   $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.
2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Partie 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1) Placer les points A, B et D d'affixes respectives
   $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2 + 2i$.
2) Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C
3) Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
   a) Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F .
   b) Placer les points E et F.
4) a) Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.
   b) En déduire la nature du triangle AEF.
5) Soit I le milieu de [EF] .

Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 :

(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) est un repère orthonormal du plan (P) .
A est le point d'affixe i et B le point d'affixe –1.
f est l'application de (P) privé de O dans (P) qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point M'= f(M) d'affixe z' = $\frac{-1}{\bar{z}}$.

1) a) Soit E le point d'affixe $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par f d'affixe $z_{E'}$.
Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
b) On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1 ; Déterminer l'image de C_1 par f .

2) a) Soit K le point d'affixe $z_K = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par f . Calculer l'affixe $z_{K'}$ de K'.
b) Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2 ; Déterminer l'image de C_2 par f .

3) On désigne par R un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi[$.
R appartient au cercle de centre A et de rayon 1.
a) Monter que z' + 1 = $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}$.
En déduire que $|z'+1| = |z'|$.
b) Si on considère maintenant les points d'affixes $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).

Exercice 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) .
Unité graphique : 0,5 cm .
On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 8 , b = 6j et c = 8j^2 .
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné .
2) On appelle a' , b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
b) Montrer que b' = $16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
En déduire que O est un point de la droite (BB') .
c) On admet que c' = 7 + 7i$\sqrt{3}$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.
3) On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O .
a) Calculer la distance OA + OB + OC .
b) Montrer que j^3 = 1 et que 1 + j + j^2 = 0 .
c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que a = 8, b = 6j et c = 8j^2 ;

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| = |a+bj^2+cj| = 22$$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|$

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O .

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) . On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' = $\frac{4}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2) Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1 .
3) Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe .
4) a) Donner une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM'}$). Interpréter géométriquement ce résultat.

   b) Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r .

   c) Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3 et construire géométriquement son image P' par f .
5) On considère le cercle C_1 de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de C_1, distinct de O, appartient à la droite D d'équation x = 2 .

Exercice 6 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). L'unité graphique est
2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}$ = i.

   Ecrire la solution sous forme algébrique.
2) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
3) Soit A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
   a = 2, b = 4, a' = 2i et d = 2 + 2i . Quelle est la nature du triangle ODB ?
4) Soient E et F les points d'affixes respectives e = 1 – i $\sqrt{3}$ et f = 1 + i $\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?
5) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 2. Soit (C') le cercle de centre A' et de rayon 2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

   a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

   b) Démontrer que le point E' est un point du cercle (C').

   c) Vérifier que : e – d = ($\sqrt{3}$ + 2)(e' – d). En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
6) Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.

<u>Exercice 7</u> :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
(unité graphique 1 cm)

1) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation suivante :
$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes : $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
   a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.
   b) Calculer les distances OA, OB, AB.
   En déduire la nature du triangle OAB.
3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe d du point D.
4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; –1), (D ; 1), (B ; 1).
   a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe
   $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
   b) Placer les point A, B, C, D et G sur une figure.
   c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.
   d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5) Quelle est la nature du triangle AGC ?

<u>Exercice 8</u> :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) ; unité graphique 1 cm .

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :
$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

I. Résolution de l'équation (E).
   1) Montrer que – i est solution de (E) .
   2) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que
   $$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$$
   3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives 4 + i , 4 – i et – i .
   1) Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
   2) Le point Ω est le point d'affixe 2 . On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S .
   3) Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathcal{C}$.
   4) A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.

a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .
b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i.
   Déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.
c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de z .
d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 9 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) ; unité graphique 2 cm.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives a = 1 et b = – 1.
On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : z' = $\frac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1) Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que M = f(M).
2) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de – 1, (z'–1)(z +1) = – 2
   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg(z'– 1) et arg(z + 1), pour tout nombre complexe z différent de – 1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4) Soit P le point d'affixe p = – 2 + i $\sqrt{3}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de (p + 1).
   b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).
   c) Soit Q le point d'affixe q = – $\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
      Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .