تمرين 1

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$h(x)=x^3-3x-1$.

1. ادرس تغيرات الدالة h.
2. بين أن المعادلة $(E): h(x)=0$ تقبل ثلاث حلول حقيقية.
3. احسب $\cos 3\alpha$ بدلالة $\cos\alpha$.
4. نضع $x=2\cos\alpha$، استنتج الحلول الثلاث للمعادلة (E) على شكلها المثلثي (نرمز للحلول الثلاث ب x_1 و x_2 و x_3).
5. أحسب :
$x_1+x_2+x_3$ و $x_1x_2x_3$ و $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

تمرين 2

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$.
نفترض أن:

- f و g متصلتان على $[a,b]$ و قابلتان للاشتقاق على $]a,b[$.
- $\forall x\in]a,b[\quad |f'(x)|\le g'(x)$.

1. بين أن g دالة تزايدية على $[a,b]$.
2. بين أن $(f-g)$ تناقصية على $[a,b]$، ثم استنتج أن : $f(b)-f(a)\le g(b)-g(a)$.
3. بين أن $(f+g)$ تزايدية على $[a,b]$، ثم استنتج أن :
$-(f(b)-f(a))\le g(b)-g(a)$.
4. استنتج أن : $|f(b)-f(a)|\le g(b)-g(a)$.
5. تطبيق:
h دالة عددية معرفة و متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث:
$(\exists M\ge 0)(\forall x\in]a,b[): \quad |h'(x)|\le M$.
بين أن: $|h(b)-h(a)|\le M(b-a)$.
ادرس الحالة التي يكون فيها: $M=0$.

تمرين 3

لتكن f دالة عددية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
حدد النهاية التالية:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\times f(2x)\times\cdots\times f(nx)}{x^n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

تمرين 4

f دالة عددية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و متصلة في 0 بحيث: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$.
بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين 5

f دالة عددية معرفة من $D\subseteq\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ورتيبة.
نفترض أن:
$\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2: \quad a<b \ et \ f(a)=f(b)$.
بين أن f ثابتة على المجال $[a,b]$.

تمرين 6

I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة عددية معرفة على I و تزايدية قطعا عليه.
بين أن المعادلة $f(f(x))=x$ تكافئ $f(x)=x$.

تمرين 7

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال $[a,b]$ بحيث: $\forall x\in[a,b] \quad f(x)>g(x)$.
بين أن: $\exists\lambda>0: \ \forall x\in[a,b], \quad f(x)\ge g(x)+\lambda$.

تمرين 8

لتكن f دالة عددية معرفة و متصلة على مجال $[a,b]$ لا يحتوي على 0 نحو $[a,b]$.
بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث: $cf(c)=ab$.

تمرين 9

g دالة عددية معرفة و متصلة على مجال $[a,b]$ نحو $[a,b]$.
بين أن g تقبل على الأقل نقطة صامدة المجال $[a,b]$.

تمرين 10

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث:
$f(b)>b^2$ و $f(a)<ab$.
بين أن: $\exists c\in]a,b[: \quad f(c)=bc$.

تمرين 11

f دالة عددية معرفة و متصلة على مجال I من $\mathbb{R}$ بحيث f لا تنعدم على I.

بين أن:

$(\forall x\in I;\quad f(x)>0)$ أو $(\forall x\in I;\quad f(x)<0)$.

تمرين 12

g دالة عددية معرفة و متصلة على مجال $[0,1]$ نحو $[0,1]$.

بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists x_n\in[0,1]/\quad g(x_n)=x_n^n$.

تمرين 13

f دالة عددية معرفة و متصلة على المجال $[a,b]$ و $n\in\mathbb{N}^*$.

لتكن x_1 و x_2 و ... و x_n أعداد حقيقية من المجال $[a,b]$.

بين أن: $\exists c\in[a,b]/\quad f(c)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$.

اعط تأويلا مبيانيا لنتيجة المحصل عليها.

تمرين 14

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$.

نفترض أن: $\exists k\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}/\quad |f(x)|\leq k|x|$.

1. بين أن $f(0)=0$.
2. بين أن f متصلة في 0.

تمرين 15

بين أن: $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \sin x\geq\dfrac{2}{\pi}x$.

تمرين 16

f دالة عددية بحيث:

$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل أربع حلول في $\mathbb{R}$.

تمرين 17

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[0,1]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ بحيث: $f(1)=1$ و $f(0)=0$.

بين أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ بحيث:

$2\alpha f'(\alpha)=\sqrt{\alpha}$.

تمرين 18

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[0,1]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ بحيث: $f(1)=1$ و $f(0)=0$.

1. بين أن c يقبل مماسا موازيا للمنصف الأول للمعلم.
2. بين أنه يوجد c من المجال $]0,1[$ بحيث:

$f'(c)=2c$.

تمرين 19

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x)=3\sin(2\alpha x)+2\sin(3\beta x)$، حيث α و β عددان حقيقيان.

نفترض أن: $\forall x\in\mathbb{R},\quad |f(x)|\leq|\sin x|$.

1. بين أن: $|f'(0)|\leq 1$.
2. استنتج أن: $|\alpha+\beta|\leq\dfrac{1}{6}$.

تمرين 20

f دالة عددية متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ بحيث: f' دالة تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

بين أن:

$\forall(a,b)\in]0,+\infty[^2\ a<b:\quad f(b)-f(a)<(b-a)f'(a)$.

تمرين 21

f دالة عددية متصلة على $[a,b]\ (a>0)$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث: $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}$.

بين أن: $\exists x_0\in]a,b[/\quad x_0f'(x_0)=f(x_0)$.

$$e^{i\pi}+1=0$$

ذ. علي تاموسيت

tamoussit2009@gmail.com

http://4maths.jimdo.com