تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x(x-2)} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x-2};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{1-x^2};$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{2x^2+5};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\,\mathrm{tg}\, x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin x};$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-3x}+x;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^3-2x+5} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2-7}-x;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt[4]{x^3-7x}-\sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\mathrm{tg}\, x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cos x\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2\cos x-\sqrt{2}} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(x^2+x+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\, 2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{3x-2|x|};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos^2 x};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{\sin(x-1)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, x-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(2\,\mathrm{tg}\, x)-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2}\mathrm{tg}\, x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right);$$

$$**\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\, x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+x\right)}{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{tg}\, x-\sin x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi\left(\cos^2 x-\cos x\right)}{2\cos^2 x-3\cos x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\mathrm{tg}\, 2x};$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,\mathrm{tg}^2 x \quad ;$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس زوجية الدالة f .
3. اعط جدول تغيرات الدالة f .
4. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[3,+\infty[$.
   أ. بين أن g تقابل من المجال $[3,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.
   ب. حدد الدالة العكسية للدالة g لكل x من J .

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=2\sqrt{x}-x$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات D_f.
3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين صفر، ثم أول النتيجة هندسيا.
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0;1]$.

a. بين أن g تقابل من المجال $[0;1]$ نحو مجال J يجب تحديده.
b. حدد تعبير g^{-1}.

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. بين أن f متصلة على D_f.
3. بين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. اعط جدول تغيرات الدالة f.
5. لتكن h قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.
   أ. بين أن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.
   ب. حدد الدالة العكسية للدالة h لكل x من J.

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $g(x) = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2$.

1. حدد D_g.
2. احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
3. ادرس تغيرات الدالة g.
4. ليكن h قصور الدالة g على المجال $I = [0,4]$.
   a. بين أن h تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.
   b. بين أن (C_h) و $(C_{h^{-1}})$ منطبقان لكل x من المجال I.

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$.

1. حدد D_f.
2. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. بين أن: $\forall x \in D_f;\quad f(x) = \left(\sqrt{x-3} + 1\right)^2$.
4. ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 3.
5. اعط تغيرات الدالة f.
6. بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يجب تحديده.
7. حدد تعبير $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I =]1,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

1. بين أنه: $\forall x \in I,\quad f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{2}{x-1}}$.
2. بين أن f تناقصية قطعا على المجال I.
3. بين أن f تقابل من I نحو I.
4. حدد الدالة العكسية f^{-1}.

تمرين 8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. أحسب نهايات f عند محدات D_f.
3. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:
$(\forall x \in D_f):\quad f(x) = a + \dfrac{b}{1-\sqrt{x}}$.
4. بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0;1[$.
5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0;1[$.
   a. بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1}.
   b. حدد مجموعة تعريف g^{-1}.
   c. حدد تعبير g^{-1}.

تمرين 9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

1. بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) > 0$.
2. أحسب نهايات f عند محدات حيز تعريف الدالة f.
3. ادرس تغيرات الدالة f.
4. بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}):\quad \dfrac{-1}{f(x)} = x - \sqrt{x^2+1}$.
5. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J من $\mathbb{R}$ يجب تحديده.

6. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.
7. استنتج تغيرات الدالة f^{-1}.

تمرين 10

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{|x-2|-2}.$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=2$.
3. اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة عليها.

تمرين 11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.
2. ادرس زوجية الدالة f.
3. ادرس رتابة الدالة f على $\mathbb{R}^+$ ثم استنتج رتابتها على $\mathbb{R}$.
4. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد الدالة العكسية f^{-1}.

تمرين 12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}.$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. بين أن f تزايدية قطعا على $I=[0,+\infty[$.
4. لتكن g قصور الدالة f على المجال I.
   أ. بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده.
   ب. حدد الدالة العكسية للدالة g لكل x من J.

تمرين 13

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي:

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}+1}.$$

1. حدد D_h.
2. أحسب نهايات f عند محدات D_h.
3. بين أن h تناقصية قطعا على D_h.
4. بين أن h تقابل من D_h نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 14

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

1. حدد D_g.
2. أحسب نهايات g عند محدات D_g.
3. بين أن g تناقصية قطعا على $]-1;0]$.
4. بين أن g تقابل من $]-1;0]$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد g^{-1}.

تمرين 15

نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $h(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$.

1. حدد D_h.
2. احسب $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
3. بين أن h تزايدية قطعا على D_h.
4. بين أن h تقابل من D_h نحو جزء من $\mathbb{R}$ يجب تحديده.
5. حدد تعبير $h^{-1}(x)$.

تمرين 16

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(E_1):\ \sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+2=0$$

$(E_2):\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$ ، يمكن وضع: $t=\sqrt[6]{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

$(E_3): \sqrt[3]{(1+x)^2}+4\sqrt[3]{(1-x)^2}=4\sqrt[3]{1-x^2}$ ، يمكن وضع: $t=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

تمرين 17

بين أن المعادلة:

$$\theta\in\left]0;\pi\right[\ ;\ \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$$

تقبل حلا على الأقل.

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $g(x)=2x^3-5x^2-3$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]\dfrac{5}{2};3\right[$.

تمرين 19

بين أن المعادلة $x^3+4x+2=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

تمرين 20

أوجد معادلة معاملاتها أعداد صحيحة نسبية تقبل العدد $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ حلا لها.

تمرين 21

بين أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ حيث: $1-\sin\alpha=\alpha$.

تمرين 22

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=\operatorname{tg}x-x-1$.

1. بين أن f متصلة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. بين أن f تزايدية قطعا على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. حدد صورة المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ بالدالة f.
4. استنتج أن:

$$\left(\exists!\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right):\quad \operatorname{tg}\alpha=\alpha+1.$$

تمرين 23

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0;1]$ بحيث: $\forall x\in[0;1],\quad 1<f(x)\le 2$.

ولتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي: $\forall x\in[0;1],\quad g(x)=xf(x)-1$.

1. بين أن g متصلة على المجال $[0;1]$.
2. حدد إشارة كل من $g(0)$ و $g(1)$.
3. استنتج أن: $\exists c\in\left]0;1\right[\quad f(c)=\dfrac{1}{c}$.

تمرين 24

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0;1]$ حيث: $f(0)=0$ و $f(1)=1$.

بين أن: $\exists c\in\left]0;1\right[\quad f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$.

تمرين 25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=x-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$.

1. تحقق من أن: $\forall x>0\quad f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.
2. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
3. ليكن x و y من $\left[1;+\infty\right[$ بحيث $x<y$. قارن $f(x)$ و $f(y)$ ثم استنتج رتابة f على $\left[1;+\infty\right[$.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[1;+\infty\right[$.
5. بين أن α يحقق: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$.
6. استنتج قيمة α.

ذ . علي تاموسيت
tamoussit2009@gmail.com
http://4maths.jimdo.com