Continuité & Dérivation :

Exercice 1:

Soit D un sous-ensemble de **R** symétrique à 0.

Montrer que : $\forall f \in \mathbf{R}^D,\ \exists!\, g, h \in \mathbf{R}^D \ /\ f = g + h$ avec g paire et h impaire.

$\mathbf{R}^D$ est l'ensemble des applications de D à valeurs dans **R**.

Exercice 2:

Soit $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone.

On suppose $\exists x, y \in D \ \ telque\, x < y \ \ et \ \ f(x) = f(y)$.

Montrer que : $f_{|[x,y]}$ est constante,

i.e. f est constante sur l'intervalle $[x, y]$.

Exercice 3:

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues $(a<b)$ tels que :

$\forall x \in [a,b], \quad f(x) > g(x)$.

Montrer : $\exists \lambda > 0 \ \ telque \ \forall x \in [a,b], \quad f(x) \geq g(x) + \lambda$.

Exercice 4:

Soit I un intervalle de **R** et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante.

Montrer que l'équation $f[f(x)] = x$ équivaut à $f(x) = x$.

Application. Discuter l'équation $\exp[a \exp(ax)] = x \quad (a > 0)$.

Exercice 5:

Soit f définie sur **R** et continue en 0 telle que : $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f(2x) = f(x)$.

Montrer que f est constante.

Exercice 6:

Soit f définie sur **R** et continue en 0 telle que :

$\forall x, y \in \mathbf{R}, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que f est continue sur **R**.

Exercice 7:

Soit f la foction numérique de la variable réelle x telle que :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Montrer que l'équation $(E): \ f(x) = 0$ a trois racines réelles.
2. Calculer $\cos(3\alpha)$, en fonctionde $\cos(\alpha)$.
3. Posons alors $x = 2\cos(\alpha)$, en déduire les trois racines de l'équation (E) sous forme trigonométrique (notons les trois racines $x_1, x_2 \ et \ x_3$).
4. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2x_3 \ et \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

Exercice 8:

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe, i.e. $\exists c \in [0,1]: \ f(c) = c$
.

Exercice 9:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de **R** et continue sur I .

Montrer que : si f ne s'annulle pas dans I. Alors on a :

$$(\forall x \in I) \ f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad (\forall x \in I) \ f(x) < 0.$$

Exercice 10:

Montere que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}C_n^n$$

Exercice 11:

Montere que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$.

Exercice 12:

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

Soient $f \ et \ g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ dérivables sur $]a,b[$ telles que : $\forall x \in \ ]a,b[, \ |f'(x)| \leq g'(x)$.

Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Exercice 13:

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ telle que :

$\exists M \geq 0 \; \forall x \in]a,b[, \; |f'(x)| \leq M$.

Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Exercice 14:

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

Soit f une fonction de classe C^1 (f dérivable et f' continue) sur $[a,b]$.

Montrer que : $\exists M \geq 0$ tel que $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Exercice15:

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ telle que :

$\exists m, M \in \mathbf{R} \; \forall x \in]a,b[, \; m \leq f'(x) \leq M$.

Montrer que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Exercice 16:

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

On considère l'application P définie par : $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$.

On pose : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}$ où $x \in E = \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

1. Montrer que f dérivable sur E et que $f'(x) < 0 \; \forall x \in E$.
2. Montrer que : $f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} \quad et \quad P(x).P''(x) < P'^2(x) \quad \forall x \in E$.

Exercice 17:

Soient f *et* g deux fonctions vérifiant : $f'(x) = \frac{1}{x} \quad et \quad f \circ g(x) = x$.

1. Montrer que si g dérivable, alors $g'(x) = g(x)$.
2. Déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad g^{(n)}(x) = g(x)$.

Exercice 18:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ et soit a et b deux réels tels que : $a\neq b$.

Montrer : $\exists c\in\,]a,b[$ tel que : $\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{b+\sqrt{b^2+1}}=\exp\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{c^2+1}}\right)$.

Exercice 19:

Soient a et b deux réels tels que : $0<a<b$.

Montrer que : $\dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}<\dfrac{1}{a}$.

Exercice 20:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$f(x)=x(1+x)^n \text{ , } n\in\mathbf{N}^*.$$

1. Montrer que l'on a : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}$.
2. Calculer la valeur de l'expression $A=\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k$.