Suites réelles :

Exercice 1:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

1. Démontrer , pour tout entier naturel n, que : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
2. Déduire que la suite (u_n) a une limite que l'on calculera.

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{12+u_n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4:

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que : $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{(2+u_n)(2+u_{n-1})} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.
3. En déduire que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_1 - u_0$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5:

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n = \frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^{n} E(k.x)$, $x \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{n+1}{2n}.x - \frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.x$.
2. Déduire que la suite (v_n) a une limite que l'on calculera.

Exercice 6:

Soit $(w_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$.

1. Calculer C_n^2, pour tout entier n supérieur ou égale à 2.
2. Pour n supérieur ou égale à 5.
   - Montrer que : $\forall k \in \{2,3,\ldots,n-2\}$, $C_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2}$.
   - En déduire que : $\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k}$.

3. Déduire que $(w_n)_{n\geq 0}$ converge, et calculer sa limite.

Exercice 7:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbf{Z}$.

Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 8:

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes dans $[0,1]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 9:

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle.

   Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$.

   Montrer que, si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers l, alors $(v_n)_{n\geq 1}$ converge aussi vers l.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = l\in\mathbf{R}$.

   Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{n}\right) = l$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs.

   Montrer que, si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers l, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge aussi vers l.(utilisé 2. dans le cas où $l>0$).
4. Application : calculer les limites, quand n tend vers l'infini de :

   $\left(C_{2n}^{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\ldots(n+n)}$, $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{1.3.\ldots.(2n-1)}$, $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 10:

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0\in\,]0,1[\quad et \quad u_{n+1} = u_n - u_n{}^2 \quad \forall n\in\mathbf{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$.
3. Vérifier que $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 11:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
2. On sepropose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

- Première méthode :
  a. Montrer que la suite est décroissante.
  b. Déduire de ce qui précède que la suite est convergente , puis trouver sa limite.
- Deuxième méthode :
  a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-4\leq\dfrac{1}{4}(u_n-4)$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n, 0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{4^n}$.

c. En déduire que la suite converge et trouver sa limite.

Exercice 12:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 0$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a l'encadrement : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$.

   b. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

   c. Déterminer la limite a de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

   b. Retrouver ainsi la limite a de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 13:

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathbf{C},\ \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = \sum_{p=0}^{2^{n+1}-1} z^p$.
2. En déduire pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 14:

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

1. Donner la terme général du (u_n).
2. Calculer la limite l de la suite (u_n).

Exercice 15:

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = 2.\sqrt[3]{u_n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est positive.
2. Montrer que (u_n) converge et determiner sa limite.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 16:

On considère les deux suites définies par $a_0 = a > 0,\ b_0 = b > 0$ et

$$\forall n \in N, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

a. Montrer que ces deux suites sont bien définies.

b. Justifier $\forall n \in N^*, a_n - b_n \geq 0$

c. Etudier le sens de variation de $(a_n), (b_n)$. En déduire que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.

Exercice 17:

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

On admet que leur limite commune est le nombre e : $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = e$.

Exercice 18:

Soit α un nombre réel positif donné.

a) Montrer que les données : " $u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$ " permettent de définir une suite u.

b) Calculer $u_{n+1} - \sqrt{\alpha}$. En déduire que pour $n \geq 1$, u_n est minoré par $\sqrt{\alpha}$.

c) Etudier le sens de variation de la suite u.

d) Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite.

e) Déterminer l'abscisse du point d'intersection, avec l'axe (Ox), de la tangente au point d'abscisse u_n à la parabole d'équation $y = x^2 - \alpha$. Interpréter géométriquement la suite u.