

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x} ; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

## تمرين 2

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
- بين أن  $f$  متصلة على  $D_f$ .
- بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- اعط جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- لتكن  $h$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[1; +\infty[$ .

- أ. بين أن  $h$  تقابل من المجال  $[1; +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده.  
ب. حدد الدالة العكسية للدالة  $h$  لكل  $x$  من  $J$ .

## تمرين 3

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

- بين أنه لكل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f(x) > 0$ .
- أحسب نهايات  $f$  عند محداث حيز تعريف الدالة  $f$ .
- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- بين أن:  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{-1}{f(x)} = x - \sqrt{x^2 + 1}$ .
- بين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $J$  من  $\mathbb{R}$  يجب تحديده.
- حدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .
- استنتج تغيرات الدالة  $f^{-1}$ .

## تمرين 4

نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$h(x) = x^3 - 3x - 1$$

- ادرس تغيرات الدالة  $h$ .

## تمرين 1

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 1}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \operatorname{tg} x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-3}}{x-4} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cos x \sin x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2 \cos x - \sqrt{2}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + |x|}{3x - 2|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-2)}{\sin(x-1)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(2\operatorname{tg} x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$$

$$** \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt[3]{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} x - \sin x}{x}$$

7. حدد تعبير  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .

### تمرين 8

بين أن المعادلة:

$$\theta \in ]0; \pi[; \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$$

تقبل حلا على الأقل.

### تمرين 9

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ .
3. أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

### تمرين 10

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{|x-2| - 2}$$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 2$ .
3. اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة عليها.

### تمرين 11

نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$$

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$ .
2. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$

$$\text{من المجال } ]\frac{5}{2}; 3[.$$

### تمرين 12

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين على مجال  $[a; b]$  حيث  $a < b$

نفترض أن:

•  $f$  و  $g$  متصلتان على  $[a; b]$  و قابلتان

للاشتقاق على  $]a; b[$ .

•  $\forall x \in ]a; b[ \quad |f'(x)| \leq g'(x)$

1. بين أن  $g$  دالة تزايدية على  $[a; b]$ .

2. بين أن المعادلة  $h(x) = 0$ :  $(E)$  تقبل ثلاث حلول حقيقية.

3. احسب  $\cos 3\alpha$  بدلالة  $\cos \alpha$ .

4. نضع  $x = 2 \cos \alpha$ ، استنتج الجذور الثلاث للمعادلة  $(E)$  على شكلها المثلثي.

### تمرين 5

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ .
2. ادرس زوجية الدالة  $f$ .
3. ادرس رتبة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}^+$  ثم استنتج رتابتها على  $\mathbb{R}$ .
4. بين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده.
5. حدد الدالة العكسية  $f^{-1}$ .

### تمرين 6

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$$

1. حدد  $D_f$ .
2. أحسب نهايات  $f$  عند محداث  $D_f$ .
3. بين أن  $f$  تناقصية قطاعا على  $] -1; 0[$ .
4. بين أن  $f$  تقابل من  $] -1; 0[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده.
5. حدد  $f^{-1}$ .

### تمرين 7

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$$

1. حدد  $D_f$ .
2. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. ادرس قابلية اشتقاق  $f$  على يمين 3.
4. بين أن:  $\forall x \in D_f; f(x) = (\sqrt{x-3} + 1)^2$ .
5. اعط تغيرات الدالة  $f$ .
6. بين أن  $f$  تقابل من  $D_f$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده.

3. حدد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث:

$$(\forall x \in D_f): f(x) = a + \frac{b}{1 - \sqrt{x}}$$

4. بين أن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0; 1]$ .

5. ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[0; 1]$ .

a. بين أن  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$ .

b. حدد مجموعة تعريف  $g^{-1}$ .

c. حدد تعبير  $g^{-1}$ .

### تمرين 17

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - 1$$

يلي:

1. بين أن  $f$  متصلة على  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. بين أن  $f$  تزايدية قطعاً على  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

3. حدد صورة المجال  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  بالدالة  $f$ .

4. استنتج أن:

$$\left(\exists! \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right): \operatorname{tg} \alpha = \alpha + 1$$

### تمرين 18

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة  $f$ .

2. بين أن  $f$  دالة زوجية.

3. بين أن الدالة  $f$  تقبل تمديداً بالاتصال في

$$x_0 = 0$$

### تمرين 19

لتكن  $f$  دالة متصلة على المجال  $[0; 1]$  بحيث:

$$\forall x \in [0; 1], 1 < f(x) \leq 2$$

ولتكن  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; 1]$  بما يلي:

$$\forall x \in [0; 1], g(x) = xf(x) - 1$$

1. بين أن  $g$  متصلة على المجال  $[0; 1]$ .

2. حدد إشارة كل من  $g(0)$  و  $g(1)$ .

3. استنتج أن:  $\exists c \in ]0; 1[ f(c) = \frac{1}{c}$

2. بين أن تناقصية على

$[a; b]$ ، ثم استنتج أن:

$$f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$

3. بين أن  $(f+g)$  تزايدية على  $[a; b]$ ،

ثم استنتج أن:

$$-(f(b) - f(a)) \leq g(b) - g(a)$$

4. استنتج أن:

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

### تمرين 13

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  و قابلة

للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$  بحيث  $f(0) = 0$  و

$$f'(0) = 1$$

حدد النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \times f(2x) \times \dots \times f(nx)}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

### تمرين 14

بين أنه يوجد عدد وحيد  $\alpha$  من المجال  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  حيث:

$$1 - \sin \alpha = \alpha$$

### تمرين 15

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. أحسب نهايات  $f$  عند محداث  $D_f$ .

3. احسب:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

4. ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

5. لتكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[0; 1]$ .

a. بين أن  $g$  تقابل من المجال  $[0; 1]$

نحو مجال  $J$  يجب تحديده.

b. حدد تعبير  $g^{-1}$ .

### تمرين 16

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما

يلي:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. أحسب نهايات  $f$  عند محداث  $D_f$ .

## تمرين 20

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي:

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$$

1. تحقق من أن:

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

2. احسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. ليكن  $x$  و  $y$  من  $[1; +\infty[$  بحيث  $x < y$

قارن  $f(x)$  و  $f(y)$  ثم استنتج رتبة  $f$

على  $[1; +\infty[$ .

4. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$

في المجال  $[1; +\infty[$ .

5. بين أن  $\alpha$  يحقق:  $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$

6. استنتج قيمة  $\alpha$ .

## تمرين 21

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$$

1. بين أن:  $f'(x) = 3 \sin^3 x$  ( $\forall x \in [0; \pi]$ )

2. استنتج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; \pi]$ .

3. بين أن:  $\exists! \alpha \in ]0; \pi[ \quad f(\alpha) = \sqrt{2}$ .

## تمرين 22

لتكن  $f$  دالة عددية متصلة على المجال  $[0; 1]$  حيث:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(1) = 1$$

بين أن:  $\exists c \in ]0; 1[ \quad f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

## تمرين 23

بين أن المعادلة  $x^3 + 4x + 2 = 0$  تقبل حلا وحيدا في

$\mathbb{R}$ .